PART4　同じものを含む順列

例題

(1) 6 個の数字 1，1，2，2，3，4 を 1 列に並べて 6 桁の整数を作るとき，次の問いに答えよ。

(i) 6 桁の整数は何通りできるか。

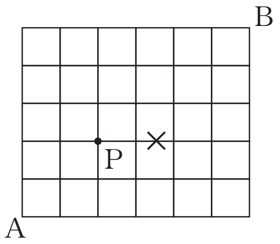
(ii) 3 が 4 より左にある並べ方は何通りあるか。

(2) 右の図のような道のある町で，A から B までの最短経路のうち，次のものの総数を求めよ。

(i) 最短経路すべて

(ii) P を通る

(iii) P を通り，×を通らない



Point Pickup

練習

(1) SAITAMA の 7 文字を 1 列に並べるとき，次の問いに答えよ。

(i) すべての並べ方は何通りあるか。

(ii) 子音が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

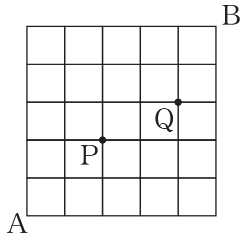
(iii) S，I，T がこの順に並ぶ並べ方は何通りあるか。

(2) 右の図のような道のある町で，A から B までの最短経路のうち，次のものの総数を求めよ。

(i) 最短経路すべて

(ii) P を通る

(iii) P または Q を通る。



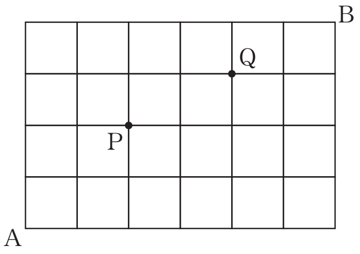
第 3 講　PART4　確認問題

1 KAWAGOE の 7 文字を 1 列に並べるとき，すべての並べ方は **アイウエ** 通りある。

2 KAWAGOE の 7 文字を 1 列に並べるとき，子音が隣り合わない並べ方は **オカキ** 通りある。

3 KAWAGOE の 7 文字を 1 列に並べるとき，K，W，G がこの順に並ぶ並べ方は **クケコ** 通りある。

4 右の図のような道のある町で，A から B までの最短経路の総数は **サシス** 通りある。また，最短経路のうち，Q を通るものの総数は **セソタ** 通りある。さらに，P または Q を通るものの総数は **チツテ** 通りある。



PART4　同じものを含む順列

例題

(1)　6 個の数字 1，1，2，2，3，4 を 1 列に並べて 6 桁の整数を作るとき，次の問いに答えよ。

(i)　6 桁の整数は何通りできるか。

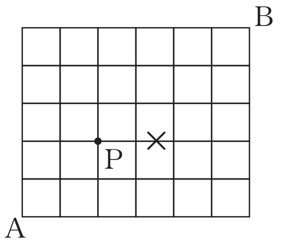
(ii)　3 が 4 より左にある並べ方は何通りあるか。

(2)　右の図のような道のある町で，A から B までの最短経路のうち，次のものの総数を求めよ。

(i)　最短経路すべて

(ii)　P を通る

(iii)　P を通り，×を通らない



(1)(i)　$\dfrac{6!}{2!2!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times2\cdot1}=180$（通り）

(ii)　1，1，2，2，○，○の 6 個を 1 列に並べたあと，2 個の○を左から 3，4 とすればよい。

よって　$\dfrac{6!}{2!2!2!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times2\cdot1\times2\cdot1}=90$（通り）

(2)　右に 1 区画進むことを→，上に 1 区画進むことを↑で表す。

(i)　A から B までの最短経路は，→ 6 個と↑ 5 個，合計 11 個の順列で表される。

よって　$\dfrac{11!}{6!5!}=\dfrac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=462$（通り）

(ii)　A から P までの最短経路は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

P から B までの最短経路は $\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

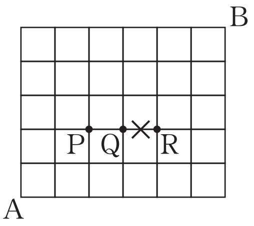
よって，P を通る最短経路は　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{7!}{4!3!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=210$（通り）

(iii)　P を通り，×を通る最短経路は，右図 A → P → Q → R → B より

$\dfrac{4!}{2!2!}\times1\times1\times\dfrac{5!}{2!3!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=60$（通り）

よって，P を通り，×を通らない最短経路は

$210-60=150$（通り）



練習

(1)　SAITAMA の7文字を1列に並べるとき，次の問いに答えよ。

(i)　すべての並べ方は何通りあるか。

(ii)　子音が隣り合わない並べ方は何通りあるか。

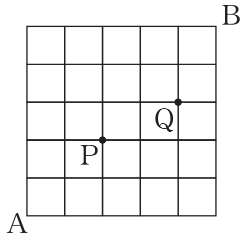
(iii)　S，I，T がこの順に並ぶ並べ方は何通りあるか。

(2)　右の図のような道のある町で，A から B までの最短経路のうち，次のものの総数を求めよ。

(i)　最短経路すべて

(ii)　P を通る

(iii)　P または Q を通る。



(1)(i)　$\dfrac{7!}{3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!}=7\cdot6\cdot5\cdot4=840$ (通り)

(ii)　母音 A，A，A，I の4文字を並べる方法は $\dfrac{4!}{3!}=4$ (通り)

母音の間または両端の5箇所中3箇所に子音 S，T，M を並べる方法が ${}_5P_3=60$ (通り)

よって　$4\times60=240$ (通り)

(iii)　○，○，○，A，A，A，M の7文字を1列に並べたあと，3個の○を左から S，I，T とすればよい。

よって　$\dfrac{7!}{3!3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=140$ (通り)

(2)　右に1区画進むことを→，上に1区画進むことを↑で表す。

(i)　→5個と↑5個の順列より　$\dfrac{10!}{5!5!}=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=252$ (通り)

(ii)　A→P→B より　$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{6!}{3!3!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=120$ (通り)

(iii)　Q を通る最短経路は　A→Q→B より　$\dfrac{7!}{4!3!}\times\dfrac{3!}{1!2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}\times3=105$ (通り)

P と Q の両方を通る最短経路は　A→P→Q→B より

$\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!}\times\dfrac{3!}{2!}=\dfrac{4\cdot3}{2\cdot1}\times3\times3=54$ (通り)

よって，P または Q を通る最短経路は

$120+105-54=171$ (通り)

第 3 講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] アイウエ：2520

[解説]

7 個の文字のうち，A の 2 個が同じものなので，求める場合の数は

$$\frac{7!}{2!}=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=\mathbf{2520}\text{（通り）}$$ [A]

[A]　同じものを含む順列の総数
n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，これら n 個のものをすべて 1 列に並べる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$$

ただし，$p+q+r+\cdots\cdots=n$

2

[正解] オカキ：720

[解説]

母音 A，A，O，E の 4 文字を並べる方法は

$$\frac{4!}{2!}=12\text{（通り）}$$ [B]

母音の間または両端の 5 箇所中 3 箇所に子音 K，W，G を並べる方法が　${}_5P_3=60$（通り）

よって

$$12\times60=\mathbf{720}\text{（通り）}$$

[B]　同じものを含む順列の総数
n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，これら n 個のものをすべて 1 列に並べる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$$

ただし，$p+q+r+\cdots\cdots=n$

3

[正解] クケコ：420

[解説]

○，○，○，A，A，O，E の 7 文字を 1 列に並べたあと，3 個の○を左から K，W，G とすればよい。

よって

$$\frac{7!}{3!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{2\cdot1}=\mathbf{420}\text{（通り）}$$ [C]

[C]　並び順が決まっているものは同じものとみて，同じものを含む順列を用いて並べ方の総数を求める。

4

[正解] **サシス**：210，**セソタ**：105，**チツテ**：141

[解説]

右に１区画進むことを→，上に１区画進むことを↑で表す。

最短経路の総数は，

→６個と↑４個の順列より

$$\frac{10!}{6!4!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\mathbf{210}\text{（通り）}$$ [D]

[D]　最短経路の問題は，右に１区画進むことを→，上に１区画進むことを↑で表すことにより，最短経路の道順を→と↑の「同じものを含む順列」として扱い，その総数を求める。

Ａ→Ｑ→Ｂより

ＡからＱまでの最短経路は $\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

ＱからＢまでの最短経路は $\dfrac{3!}{2!1!}$ 通り

よって，Ｑを通る最短経路は

$$\frac{7!}{4!3!}\times\frac{3!}{2!1!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\times 3=\mathbf{105}\text{（通り）}$$

Ｐを通る最短経路は，Ａ→Ｐ→Ｂより

$$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{6!}{4!2!}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\times\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=90\text{（通り）}$$

ＰとＱの両方を通る最短経路は，Ａ→Ｐ→Ｑ→Ｂより

$$\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!1!}\times\frac{3!}{2!1!}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}\times 3\times 3$$
$$=54\text{（通り）}$$

よって，ＰまたはＱを通る最短経路は

$$90+105-54=\mathbf{141}\text{（通り）}$$